МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Чеченский государственный университет»

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра дифференциальных уравнений

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА В АСПИРАНТУРУ

Код и направление подготовки	01.06.01 Математика и механика
Код и наименование направленности подготовки	01.01.02 «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»
Квалификация(степень) выпускника	Исследователь. Преподаватель - исследователь
Форма обучения	Очная, заочная
Срок освоения	4 года (очная), 5 лет (заочная)

Грозный, 2021

Программа вступительного экзамена в аспирантуру по направлению подготовки 01.06.01 Математика и механика, направленность 01.01.02 «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление».

1.Теоремы Пикара существования и единственности решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка и их систем.
2. Теоремы Пеано существования решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка и их систем
3. Непрерывная зависимость решения задачи Коши от начальных условий.
4. Непрерывная зависимость решения задачи Коши от параметра. Производная решения по параметру.
5.Теоремы о продолжении решения задачи Коши.
6. Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Особые решения.
7. Линейные уравнения высокого порядка. Структура общего решения линейных однородных и неоднородных уравнений. Метод вариации постоянных.
8. Формула Лиувилля –Остроградского,
9. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами. Случай, когда хактеристический многочлен имеет только вещественные корни.
10 Линейные уравнения с постоянными коэффициентами. Комплексные решения, вещественные решения.
11. Системы линейных уравнений. Экспонента матрицы.
12. Матрица Коши , формула Лиувилля – Остроградского для систем.
13. Методы интегрирования линейных систем с постоянными коэффициентами.
14. Линейные системы с периодическими коэффициентами. Теория Флоке.
15. Автономные системы линейных и нелинейных уравнений. Положения равновесия. Предельные циклы. Построение фазового портрета.
16. Устойчивость по Ляпунову. Теорема Ляпунова об устойчивости положения равновесия по первому приближению.
17. Краевая задача для линейного уравнения или системы уравнений. Функция Грина. Представление решения краевой задачи.
18. Линейные уравнения второго порядка. Нули решений. Теорема сравнения. Теорема Штурма. Достаточные условия колеблемости решений.
19. Задача Штурма–Лиувилля для уравнения второго порядка. Свойства собственных функций.
20. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Теорема существования и единственности решения при условиях Каратеодори.
21. Теорема о выпрямлении векторного поля. Первые интегралы. Теорема о существовании полной системы первых интегралов.

22. Краевые, начальные, граничные условия. Примеры постановок задач для уравнений с частными производными. Примеры корректно и некорректно поставленных задач (з.Коши для волвого ур., пример Адамара, обратное уравнение теплопроводности и т.д.).

23. Линейные уравнения с частными производными первого порядка. Характеристики. Общее решение.

24. Квазилинейные уравнения с частными производными 1 порядка. Общее решение.

25. Задача Коши для линейных и квазилинейных уравнений в частных производных.

26. Системы уравнений с частными производными типа Ковалевской.
Аналитические решения. Пример несуществования аналитического решения з.Коши с аналитическими данными для уравнений не типа Коши-Ковалевской.

27. Существование и единственность аналитических решений задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 1 порядка.

28. Теорема Коши–Ковалевской.

29. Обобщения теоремы Коши-Ковалевской. Характеристика системы уравнений.

30. Понятие характеристики для полулинейных уравнений. Символ и главный символ. Общие принципы классификаций уравнений.

31. Классификация уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами в главной части. Различные способы определения типа уравнения. Приведение к каноническому виду уравнения 2-го порядка от 2-х переменных. Классификация

32. Задача Коши для волнового уравнения и методы ее решения. Формулы Даламбера, Пуассона, Кирхгофа. Метод спуска. Свойства решений (характеристический конус, конечность скорости распространения волн, характер переднего и заднего фронтов волны и др.)

33. n- мерное волновое уравнение. Поверхности пространственного и временного типов. Энергетические оценки. . Единственность решения з.Коши

34.Существование решения з.Коши для n- мерного волнового уравнения (доказать методом преобразования Фурье или другим способом).

35. Решение з.Коши для n-мерного уравнения теплопроводности преобразованием Фурье. Формулы Пуассона.

36. Симметрический оператор. Ортогональность соб.элементов симметрического оператора, отвечающих различным соб.значениям. Положительный оператор. Все соб.значения пол.оператора положительны. Абстрактная схема метода Фурье.

37. Смешанные задачи для волнового уравнения. Метод Фурье (разделения переменных).

38. Смешанные задачи для уравнения теплопроводности. Метод разделения переменных.

39. Основные постановки задач для ур. Пуассона . Теоремы о потоке тепла , о среднем значении по сфере , о среднем значении по шару , о бесконечной диф-ти гармонических ф-ций.
40. Принцип максимума. Теорема Лиувилля. Задача Дирхле для ур. Лапласа. Единственность и непрерывная зависимость от граничной ф-ции для классического решения. Теоремы о сходимости посл-ти гармонических ф-ций , об устранимой особенности.
41. Определение ф-ции Грина задачи Дирихле . Решение з.Дирихле для шара и полупространства с помощью ф-ций Грина (формулы Пуассона). Метод отражения.
42. Принцип построения обобщенных функций. Пространства основных функций E(Ω) , D(Ω) , S(R^n): 1.Пространство E(Ω) счетно-нормируемо и полно. 2.Полнота и неметризуемость D(Ω).3.Эквивалентные системы полунорм в S(R^n). Полнота S(R^n). 4.Простейшие соотношения между пространствами основных функций.
43. Свертка $g*f$ ф-ций $g, f \in L_{1,loc}(R^n)$, где suppg⊂⊂ R^n . Док-во соотношения $g*f \in L_{1,loc}(R^n)$. Ядро усреднения ω_h , ф-ция u_h средняя от u. Её св-ва
44. Пространства обобщенных функций (о.ф.) $E'(\Omega)$, $D'(\Omega)$, $S'(R^n)$. Примеры о.ф.. Регулярные и сингулярные о.ф.. Лемма дю Буа-Реймонда. Её аналог для мер. Сильная , слабая , *-слабая топологии на пространстве , сопряженном некоторому ЛТП. Полнота в *-слабой топологии пространств о.ф..
45. Равенство о.ф. нулю в области , в точке. Носитель о.ф..Теорема о разбиении единицы. Если о.ф. равна нулю в каждой точке области, то она равна нулю в этой области (и обратно).Любой элемент из $E'(\Omega)$ есть о.ф. с компактным носителем. Плотность D(Ω) в $E'(\Omega)$. Плотность D(Ω) в $D'(\Omega)$.
46. Определение основных операций над о.ф. продолжением по непрерывности . Диф-ние о.ф. . Примеры. Простейшие диф.ур. в пространствах о.ф. ($u' = 0$, $u' + \alpha(x)u = f(x)$, $u^{(m)} + \alpha_{m-1}(x)u^{(m-1)} + \ldots + \alpha_0(x)u = f(x),\ \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0,\ \partial_j u = f(x),\ u^{(m)}(x) = \delta(x)$ и другие
47. Линейная замена переменных в о.ф. . Свертка о.ф. и ее свойства. Тензорное произведение о.ф. и его свойства.
48. Преобразование Фурье F функций из пространства Шварца $S(R^n)$. Его свойства. F-топологический изоморфизм пр-ва $S(R^n)$.
49. Свойство F($D(\Omega)$)$\not\subset D(\Omega)$. Пр. Ф. над пр-вом о.ф. умеренного роста $S'(R^n)$. Свойства ($F(P(D)u)(\xi) = P(-\imath\xi)(F(u))(\xi)$, u $\in S'(R^n)$ и другие)
50. Бесконечная диф-ть преобразования Фурье о.ф. с компактным носителем. Пр. Ф. свертки 2-ух о.ф. Пр.Ф. произведения

$u_1 \cdot u_2$, где $u_1 \in S'(R^n)$, $u_2 \in S(R^n)$

51. Определение фундаментального решения диф. оператора с постоянными коэффициентами. Критерий фундаментальности решения в терминах преобразования Фурье

52. Фундаментальное решение лин. диф. оператора с обыкновенными производными.

53. Фунд. решения и решения ур-ний с правой частью. Принцип Дюамеля для уравнений с постоянными коэффициентами.

54. Связь между решениями задач Коши в их классической и обобщенной постановках.

55. Теорема (Эренпрайс, Мальгранж, Трев, Хермандер) Для любого дифференциального оператора с постоянными коэффициентами $P(D) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha \partial^\alpha$ существует фундаментальное решение. Схема доказательства

56.Найти фундаментальное решение 1-мерного волнового уравнения. Доказать формулу Даламбера.

57. Найти фундаментальное решение 2-мерного волнового уравнения. Доказать формулу Пуассона.

58. Найти фундаментальное решение 3-мерного волнового уравнения. Доказать формулу Кирхгоффа.

59.Найти фундаментальное решение опер-ра теплопроводности в R^n. Используяего доказать формулу Пуассона решения з.Коши для уравнения теплопроводности.

60. Найти фундаментальное решение оператора Коши-Римана $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$

61. Найти фундаментальное решение оператора Лапласа в R^2

62. Найти фундаментальное решение) оператора Лапласа R^3

63. Найти фундаментальное решение опер-ра Лапласа в R^n

64. Найти фундаментальное решение опер-ра Гельмгольца $\Delta + k^2$ в R^3

65. Найти фундаментальное решение оператора Шредингера $i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$

66. Найти фундаментальное решение оператора $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - b\frac{\partial}{\partial x} - \frac{b}{a}\frac{\partial}{\partial t}; a, b > 0$

67.Найти решение $u_t = u_{xx} + \theta(t-1)e^t$. Показать, что найденная функция $u(x,t) \in C(R^2)$, $u\big|_{t=0} = 0$, а в точках непр-ти функции $\theta(t-1)e^t$ $\in$-ит C^2

68. Найти решение $u_t = u_{xx} + \theta(x) \otimes \delta(t)$. Показать, что найденная функция u(x,t) при t>0 $\in$ -ит C^∞ и вып-ся $u_t = u_{xx}$, а $\lim_{t \to t_0} u(x,t)$ непр-на во всех точках непр-ти $\theta(x)$ и в этих точках $u\big|_{t=t_0} = \theta(x)$.

69. Решить в $D'(R)$ $u' + \alpha(x)u = f(x)$, где $f \in C(\Omega), \alpha \in C^\infty(\Omega)$

70.) Пусть $u \in D'(Y \times I)$, Y-открытое множество в R^{n-1} и I -интервал в R_{x_n}. Доказать, что если $\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$ в $D'(Y \times I)$, то $\exists u_0 \in D'(Y): <u, \varphi> = \int <u_0, \varphi(\cdot, x_n)> dx_n \forall \varphi \in C_0^\infty(Y \times I)$

71. Определение пространств $W_p^k(\Omega)$ и $\overset{0}{W}{}_p^k(\Omega)$. Полнота.

72. неравенства Фридрихса и Пуанкаре, эквивалентные нормы в $W_p^k(\Omega)$ и $\dot{W}_p^k(\Omega)$.

73. Доказать непрерывность оператора $A(D): W_p^{k+m}(\Omega) \to W_p^k(\Omega)$, $A(D) := \sum_{|\beta| \le m} a_\beta(x) D^\beta$. Плотность $C^\infty(\Omega)$ и не плотность $C_0^\infty(\Omega)$) в $W_p^k(\Omega)$

74. Компактность интегрального оператора со слабой особенностью $A: L_p(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$. Звездные области.

75 . Компактность вложения $W_p^k(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ при $kp > n := \dim \Omega$,.

76. Компактность вложения $W_p^k(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ $pk \le n, 1 \le q < \frac{np}{n-kp}$,

77. Продолжимость по непрерывности единственным образом отображения $u \to u\big|_{\partial\Omega}, C^\infty(\overline{\Omega}) \to C^\infty(\partial\Omega)$ до непрерывного отображения $W_2^m(\Omega) \to W_2^{m-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$;

78. Определение различных типов операторов продолжения из $W_p^m(\Omega)$ в $W_p^m(R^n)$. Продолжение в случае $\Omega = R_+^n$. Другие случаи.

79. Описание пространств $H^s(R^n)$ при целом положительном s через преобразование Фурье. Пространства $H^s(R^n)$ с положительным дробным показателем, отрицательным показателем. Пространства $H^s(\Omega)$, при произвольном показателе $s \in R$, где область Ω -ограничена , $\partial\Omega \in C^\infty$.

80. Теоремы об обратной функции, о неявной функции. Применения к дифференциальным уравнениям.

81. Элементы теории гильбертовых пространств. Теорема Рисса о представлении лин.огр.оператора. Обобщенная постановка задачи Дирихле для ур.Пуассона. Существование и единственность решений.

82. Коэрцитивные билинейные формы. Теорема Лакса-Мильграма. Краевые задачи для эллиптических дифференциальных уравнений.

83. Существование и единственность решения задачи $a(u,u) - l(u) \to \min$. Существование и единственность решений краевых задач для однородно эллиптических уравнений

84. Три принципа теории линейных операторов (равномерной ограниченности, открытости отображения, теорема Хана-Банаха)

85. Теоремы отделимости, теорема Банаха об обратном операторе и следствия из них.
86. Полилинейные операторы. Производная Фреше. Производные высших порядков. Формула Тейлора. Теоремы об обратной функции, о неявной функции. Теорема Люстерника о касательном пространстве.

87. Принцип Лагранжа для гладких задач. Случай конечномерных экстремальных задач с равенствами и неравенствами.
88. Простейшая задача вариационного исчисления. Необходимые условия экстремума (уравнение Эйлера Лагранжа).
89. Задача Больца, задача со старшими производными. Необходимые условия экстремума.
90. Изопериметрическая задача. Необходимые условия экстремума.
91. Основные понятия выпуклого анализа и формулы выпуклого исчисления.
92.Теоремы о субдифференциале и об очистке. Принцип Лагранжа для выпуклых задач. Теорема Куна-Таккера.
93. Общее понятие структурной устойчивости. Критерий Андронова-Понтрягина структурной устойчивости векторных полей на сфере.
94. Псевдодифференциальные операторы (ПДО) (определение, символ композиции двух ПДО, параметрикс, свойство псевдолокальности эллиптического ПДО).
95. Нелинейные уравнения первого порядка. Метод характеристик. Задача Коши для уравнений первого порядка.
96. Гиперболические системы законов сохранения. Постановка задачи Коши.Определения классических и обобщенных решений. Условия Ранкина-Гюгонио. Допустимые разрывы. Задача Римана о распаде разрыва для одного уравнения.
97. Методы доказательства существования решений нелинейных уравнений,основанные на вариационных методах. Примеры их применения к доказательству теорем о существовании решений нелинейных краевых задач.
98. Методы доказательства существования решений нелинейных уравнений, основанные на проекционных методах. Примеры их применения к доказательству теорем о существовании решений нелинейных краевых задач
99. Теорема Брауэра о непрерывном операторе, преобразующем замкнутый шар конечномерного пространства в себя. Теорема Пеано о существовании решения задачи Коши. Интегральная воронка. Теорема Кнезера-Фукухары.
100. Теорема Шаудера о компактном операторе, преобразующем замкнутый шар в банаховом пространстве в себя. Случай, когда вместо шара берется замкнутое выпуклое ограниченное множество.
101. Методы доказательства существования решений нелинейных уравнений, основанные на теоремах о неподвижной точке. Примеры их применения к доказательству теорем о существовании решений нелинейных краевых задач.
102.Теорема Пэли-Винера-Шварца о Фурье-образе обобщенных функций с компактным носителем.

Литература.

1. Эванс Л.К. Уравнения с частными производными, 2003

2. Д.Гилбарг, Н. Трудингер Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. -М.; главная редакция физ-мат литературы, 1989.

3. 3. Галеев Э.М., Зеликин М.И., Конягин С.В. и др. Оптимальное управление.-М.; МЦНМО, 2008.

4. В.С. Владимиров, В.В. Жаринов Уравнения математической физики-М.;физ-мат литература,2000.

5. Владимиров В.С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики.-М.; Наука, 1982

6. Шубин М.А. Лекции об уравнениях математической физики-М.,МЦНМО, 2001

7. Сборник задач по уравнениям с частными производными под ред. Шамаева А.С, - М., БИНОМ, 2005

8. Агранович М.С. Обобщенные функции-М., Изд.МЦНМО, 2008

9. Егоров Ю.В., Шубин М.А. Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Основы классической теории.-М., ВИНИТИ,1988
10. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Наука, 1998.
11. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. - М.: Наука, 1979
12. Фурсиков А. В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999.