

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Саидов Заурбек Асланбекович
Должность: Ректор
Дата подписания: 13.04.2022
Уникальный программный ключ:
2e8339f3ca5e6a5b4531845a12d1bb5d1821f0ab

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Чеченский государственный университет
имени Ахмата Абдулхамидовича Кадырова»

Утверждаю
УТВЕРЖДАЮ:

Проректор по учебной работе

Н.У. Ярычев

« 21 » 01 2022 г.



ПРОГРАММА

вступительного испытания по направлению
подготовки магистратуры 01.04.01 «Математика»,
профиль подготовки «Дифференциальные уравнения»

Программа одобрена на заседании кафедры дифференциальных
уравнений

Протокол № 5 от «20» января 2022 г.

Заведующий кафедрой _____ В.И. Гишларкаев

Составитель:

К.ф-м.н., заведующий кафедрой дифференциальных уравнений

_____ Гишларкаев В.И.

Грозный, 2022

Сдающий вступительные испытания должен:

знать:

- Общие принципы классификации уравнений в частных производных (УрЧП), основные классы УрЧП и постановки основных краевых задач для них, условия существования и единственности их решений, свойства решений; характеристическая и свободная поверхности, распространение особенностей; математические модели реальных процессов, описываемых дифференциальными уравнениями; основы теории обобщенных функций, пространства Соболева, теоремы вложения и о следах; фундаментальные решения некоторых классических дифференциальных операторов; формулы Даламбера, Плассона, Кирхгофа решения задачи Коши для волнового уравнения, аналогичные формулы для уравнения теплопроводности, функция Грина для задачи Дирихле; свойства гармонических функций.
- Уравнения Бернулли, Лагранжа, Клеро, Риккати; методы понижения порядка обыкновенных дифференциальных уравнений; фундаментальная система решений, вронскиан, формула Лиувилля-Остроградского, метод вариации постоянных; устойчивость по Ляпунову, функция Ляпунова, фазовые траектории, фокус, седло, узел, предельный цикл; функция Грина, задача Штурма-Лиувилля.
- Свойства непрерывных отображений топологических пространств, компакты; основные понятия метрических, нормированных, гильбертовых пространств; производная по вектору, 1-я вариация, производная по Фреше; представление линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве; элементы теории ортогональных систем и рядов Фурье; основные классы множеств, используемые в теории меры; продолжение меры, теорема Каратеодори, способы задания мер на $(R^n, B(R^n))$, измеримые функции, интеграл Лебега, пространства $L_p(X, \mu)$: основные неравенства, сопряженные пространства, свертка и усреднение, теоремы вложения и компактности.
- Принципы доказательства существования: компактности (Вейерштрасс-Лебег-Бэр), разреженности (Бэр), сжимающих отображений (Банах), принцип Брауэра, принцип Минти-Браудера, принцип Цорна.
- Формула Тейлора для функций многих переменных; теоремы о неявной функции, об обратной функции; функциональная (не)зависимость функций, равномерная сходимости и основные операции над семействами функций; функциональные ряды, R-, C-дифференцируемость, условия Коши-Римана, аналитические функции и их свойства, теорема Коши и ее обобщения, вычеты, ряд Лорана; интеграл Римана и критерий Лебега его существования, криволинейные и поверхностные интегралы, формулы Грина, Гаусса-Остроградского, Стокса; элементы векторного анализа и теории поля; криволинейные координаты на поверхности, квадратичные формы поверхности; интегралы (в том числе несобственные кратные), зависящие от параметра; метод множителей Лагранжа
- Линейные отображения и матрицы, ранг, инварианты линейных отображений (детерминант, след), прямые суммы пространств и отображений, структура линейного отображения, жорданова нормальная форма, собственные векторы и

спектр линейного оператора, скалярные произведения, матрица Грама; полилинейные операторы, k-формы; основные алгебраические структуры.

уметь:

- строить простейшие модели реальных процессов, описываемых дифференциальными уравнениями, определять тип уравнений, вычислять характеристики уравнений и применять их при решении (и анализе) краевых задач, решать краевые задачи при помощи преобразования Фурье, методом разделения переменных, методом характеристик, выводить энергетические неравенства и с помощью них доказывать единственность решений краевых задач; решать дифференциальные уравнения в классах обобщенных функций, вычислять фундаментальные решения, решать задачу Коши для УрЧП с помощью фундаментальных решений; ставить краевые задачи в классах обобщенных функций, доказывая соответствующие теоремы о следах и вложениях; решать задачу Дирихле с помощью функций Грина, решать задачу Коши для линейных и квазилинейных УрЧП 1-го порядка.
- Решать оду с разделяющимися переменными, однородные, в полных дифференциалах и приводящиеся к ним, линейные уравнения и системы с постоянными коэффициентами, а также, используя теорему Лиувилля-Остроградского, с переменными коэффициентами; анализировать на существование и единственность задачу Коши для оду, искать аналитические решения з.Коши, находить производные от решения по начальным данным и параметрам; рисовать фазовые портреты автономных систем, решать краевые задачи для оду с помощью функции Грина; находить полную систему первых интегралов системы оду; решать простейшие интегральные уравнения.
- Разлагать функцию в ряды Тейлора, Лорана, Фурье; находить преобразование Фурье, Лапласа функции; разлагать целые функции в бесконечные произведения, вычислять интегралы с помощью вычетов; находить экстремумы функций (безусловный и с заданными условиями), решать простейшую задачу вариационного исчисления, изопериметрическую задачу; вычислять длины, площади и объемы, определять кривизну линии, главные кривизны поверхности; определять тип кривой и поверхности 2-го порядка; пользоваться специальными функциями; пользоваться различными приемами нахождения сумм, интегралов; вычислять вероятности событий, числовые характеристики случайных величин; векторное, смешанное произведение векторов; вычислять собственные значения и векторы линейных операторов, приводить матрицу к жордановой форме, приводить квадратичную форму к главным осям, разлагать многочлены на неприводимые множители.

Критерии оценивания

Минимальный проходной балл по дисциплине математика – 61 баллов.

1. Непрерывность функции одной переменной, свойства непрерывных функций.

2. Функции многих переменных. Дифференцируемость. Достаточные условия дифференцируемости.
3. Интеграл Римана. Критерий интегрируемости функции по Риману. Интегрируемость непрерывной функции. Первообразная. Формула Ньютона-Лейбница.
4. Неявные функции. Существование, непрерывность и дифференцируемость неявных функций.
5. Числовые ряды. Сходимость рядов. Критерий сходимости Коши. Достаточные признаки сходимости.
6. Абсолютная и условная сходимость ряда. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Умножение рядов.
7. Ряды функций. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы, почленное интегрирование и дифференцирование).
8. Степенные ряды в действительной и комплексной области. Радиус сходимости, свойства степенных рядов (почленное интегрирование и дифференцирование). Разложение элементарных функций.
9. Несобственные интегралы и их сходимость. Равномерная сходимость интегралов, зависящих от параметра. Свойства равномерно сходящихся интегралов.
10. Ряды Фурье. Достаточные условия представимости функции рядом Фурье.
11. Криволинейные интегралы 1-го и 2-го рода, формула Грина.
12. Поверхностные интегралы 1-го и 2-го рода, формула Гаусса-Остроградского и Стокса.
13. Линейные пространства, их подпространства. Базис. Размерность. Теорема о ранге матрицы. Система линейных уравнений. Геометрическая интерпретация системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений системы однородных линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.

14. Билинейные и квадратичные функции и формы в линейных пространствах и их матрицы. Приведение к нормальному виду. Закон инерции.
15. Линейные преобразования линейного пространства, их задания матрицами. Характеристический многочлен линейного преобразования. Собственные векторы и собственные значения, связь последних с характеристическими корнями.
16. Евклидово пространство. Ортонормированные базисы. Ортогональные матрицы. Симметрические преобразования. Приведение квадратичной формы к главным осям.
17. Группы, подгруппы, теорема Лагранжа. Порядок элемента. Циклические группы, факторгруппа. Теорема о гомоморфизмах.
18. Аффинная и метрическая классификация кривых и поверхностей второго порядка.
19. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Теорема о продолжении решения. Случай линейных систем.
20. Теорема о непрерывной зависимости и дифференцируемости решений по начальным условиям и по параметру. Системы в вариациях.
21. Линейные системы. Определитель Вронского. Формула Лиувилля-Остроградского. Метод вариации постоянных.
22. Экспонента линейного оператора. Линейные уравнения и системы с постоянными коэффициентами. Уравнения с квазимногочленом в правой части.
23. Автономные системы. Три типа фазовых траекторий. Особые точки линейных систем на плоскости.
24. Теорема о выпрямлении векторного поля. Первые интегралы. Теорема о существовании полной системы первых интегралов.
25. Квазилинейные уравнения с частными производными 1-го порядка: общее решение, задача Коши.

- 26.Обобщенные функции. Действия над обобщенными функциями. Фундаментальные решения операторов с постоянными коэффициентами.
- 27.Задача Коши для волнового уравнения: энергетическое неравенство, единственность решения.
- 28.Фундаментальное решение волнового оператора в случаях, когда пространственная переменная имеет размерность 1, 2, 3. Формулы Киркгоха и Пуассона. Качественное исследование.
- 29.Фундаментальное решение оператора теплопроводности. Задача Коши для уравнения теплопроводности, Формула Пуассона, принцип максимума. Краевые задачи, принцип максимума, единственность решений.
- 30.Фундаментальное решение оператора Лапласа. Функция Грина для задачи Дирихле и ее свойства. Решение задачи Дирихле для шара.
- 31.Свойства гармонических функций: теорема о среднем, принцип максимума, теорема Лиувилля, теорема об устранимой особенности.
- 32.Абстрактная схема метода разделения переменных (метод Фурье). Обоснование для различных краевых задач для 1-мерного волнового уравнения.
- 33.Условный экстремум функций многих переменных. Необходимое условие. Метод множителей Лагранжа.
- 34.Необходимые условия экстремума в простейшей задаче классического вариационного исчисления, задаче Больца.
- 35.Понятие метрического пространства, полные метрические пространства, компактность. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Принцип сходимости Коши. Критерий непрерывности функций.
- 36.Мера, измеримые функции, интеграл Лебега. Свойства.
- 37.Гильбертовы пространства. Изоморфизм ℓ^2 . Теорема Рисса о линейном функционале.

38. Ортогональные системы. Неравенство Бесселя, условие полноты. Ряды Фурье. Сходимость рядов Фурье. Полнота тригонометрической системы в пространстве непрерывных периодических функций.

Литература

1. В.С. Владимиров, В.В. Жаринов Уравнения математической физики-М.; физ-мат литература, 2011
2. Эванс Л.К. Уравнения с частными производными, 2009
3. Шубин М. А. Лекции об уравнениях математической физики-М., МЦНМО, 2010
4. Агранович М.С. Обобщенные функции-М., Изд. МЦНМО, 2008
5. А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов Нелинейный функциональный анализ и его приложения к уравнениям в частных производных. -М.; Научный Мир, 2008.
6. Кострикин А.И., Введение в алгебру, ч. I - III, М., МАИК НАУКА, 2008
7. Оптимальное управление под ред. Н.П.Осмоловского и В.М.Тихомирова .М.: издательство МЦНМО, 2008.